

به نام خدا



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

آزمون پذیرش دانشجوی دوره دکترای سال تحصیلی ۸۸-۸۷

آزمون شماره دو (درس ریاضی، خلاقیت مهندسی و هوش)

نام درس: ریاضی، خلاقیت مهندسی و هوش

تعداد سؤالات: ۳۶ سوال (از سوال ۶۶ تا ۱۰۱)

مدت زمان پاسخگویی به سؤالات: ۹۰ دقیقه

تاریخ برگزاری آزمون: پنجشنبه ۸۶/۱۲/۰۲

ساعت شروع و خاتمه آزمون: ۱۶/۳۰-۱۸

توجه: این آزمون برای کلیه داوطلبان صرفنظر از رشته-گرایش آنان بطور یکسان و مشترک برگزار می‌گردد.

لطفاً اطلاعات زیر را براساس مندرجات کارت ورودی و پاسخنامه وارد نمایید:

شماره داوطلب:

نام:

نام خانوادگی:

هرگونه مغایرت در مندرجات کارت ورودی و اطلاعات پاسخنامه را به مراقبین حاضر در جلسه اعلام نمایید.

الف. ریاضی ۱ (سوالات س ۶۶ تا س ۷۱):

س ۶۶:

کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$ صحیح می‌باشد؟

۱. سری همگرا به عدد ۲ است.
 ۲. سری واگرا است.
 ۳. سری همگرا به عدد ۱ است.
 ۴. سری همگرا به عدد $\frac{1}{2}$ است.

س ۶۷:

بزرگترین حجم یک استوانه به شرط آن که مساحت سطح جانبی آن (با احتساب دو قاعده آن) ۶۰۰ سانتی‌متر مربع باشد، چه مقداری (برحسب سانتی‌متر مکعب) می‌تواند باشد؟

۱. $\frac{2000}{\sqrt{\pi}}$
 ۲. $400\sqrt{\pi}$
 ۳. $\frac{3000}{\sqrt{\pi}}$
 ۴. $600\sqrt{\pi}$

س ۶۸:

دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$a_1 = \sqrt{6}, \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \quad \forall n \geq 1$$

کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد این دنباله صحیح می‌باشد؟

۱. دنباله صعودی و همگرا به ۶ است.
 ۲. دنباله صعودی و همگرا به ۱ است.
 ۳. دنباله صعودی و همگرا به ۳ است.
 ۴. دنباله نزولی و همگرا به ۶ است.

س ۶۹:

اگر $x^2 y = \int_1^{x^3} \sin(t^2) dt$ ($x \neq 0$) باشد، کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشد؟

۱. $xy' - 2y = 3 \cos(x^6)$
 ۲. $x^2 y' + 2y = 2x \sin(x^6)$
 ۳. $xy' + 2y = 3x \cos(x^6)$
 ۴. $xy' + 2y = 3x \sin(x^6)$

به نام خدا

آزمون پذیرش دانشجوی دوره دکترای سال تحصیلی ۸۸-۸۷

(درس ریاضی، خلاقیت مهندسی و هوش)



صفحه ۳ از ۱۴

س ۷۰:

مقدار انتگرال معین $\int_0^1 \frac{dx}{5^{-x} + 1}$ برابر است با:

۲. $\frac{\ln 2}{\ln 3}$

۱. $\frac{1}{\ln 5}$

۴. $\ln\left(\frac{3}{5}\right)$

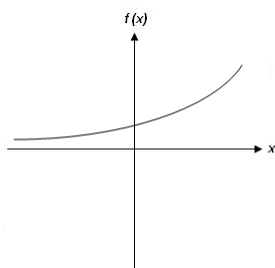
۳. $\frac{\ln 3}{\ln 5}$

س ۷۱:

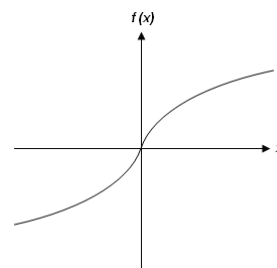
اگر تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد و به ازای هر مقدار x داشته باشیم:

$$f'(x) = f^2(x) + x^2$$

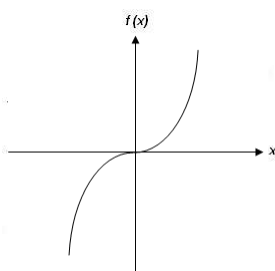
کدامیک از نمودارهای زیر می تواند نمودار f باشد؟



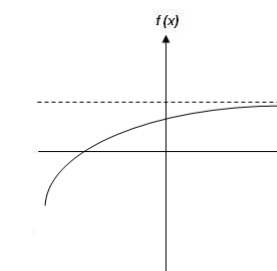
۲.



۱.



۴.



۳.

ب. ریاضی ۲ (سوالات س ۷۲ تا س ۷۷):

س ۷۲:

فرض کنید D ناحیه محصور ما بین منحنی‌های $xy = 1$ ، $xy = 2$ ، $y = x^2$ و $y = 8x^2$ باشد. مساحت ناحیه D برابر است با:

۱. $\frac{7}{3} \ln 2$.۱
 ۲. $8 \ln 2$.۲
 ۳. ۱۶ .۳
 ۴. ۱۴ .۴

س ۷۳:

مطلوب است مقدار مشتق جهت‌دار تابع زیر در نقطه $(1, -1, 2)$ و در جهت $6\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ؟

$$F(x, y, z) = xy^2 - 4x^2y + z^2$$

۱. $\frac{54}{7}$.۱
 ۲. $\frac{7}{54}$.۲
 ۳. $\frac{5}{21}$.۳
 ۴. $\frac{21}{5}$.۴

س ۷۴:

کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(4, 4, -4)$ از رویه $x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 2z - 1 = 0$ برابر است با:

۱. $\sqrt{3}$.۱
 ۲. $5 - \sqrt{3}$.۲
 ۳. $\sqrt{34} - \sqrt{3}$.۳
 ۴. $\sqrt{34} + \sqrt{3}$.۴

س ۷۵:

اگر $u = x \log(xy)$ باشد و داشته باشیم $x^3 + y^3 + 3xy = 1$ مقدار du/dx کدام است؟

۱. $1 - \frac{x(x^2 + y)}{y(y^2 + x)}$.۱
 ۲. $1 + \log(xy) - \frac{x(x^2 + y)}{y(y^2 + x)}$.۲
 ۳. $1 + \log(xy) + \frac{y(y^2 + x)}{x(x^2 + y)}$.۳
 ۴. $1 + \frac{y(y^2 + x)}{x(x^2 + y)}$.۴

س ۷۶:

محل تلاقی دو رویه $\rho = 2$ و $\varphi = \frac{\pi}{3}$ در مختصات کروی تشکیل یک منحنی در فضا را می‌دهد. خمیدگی

(انحناء) κ و تاب τ منحنی C در نقطه $(2, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ در مختصات کروی به ترتیب برابرند با:

۲. $\tau = 1$, $\kappa = \sqrt{3}$

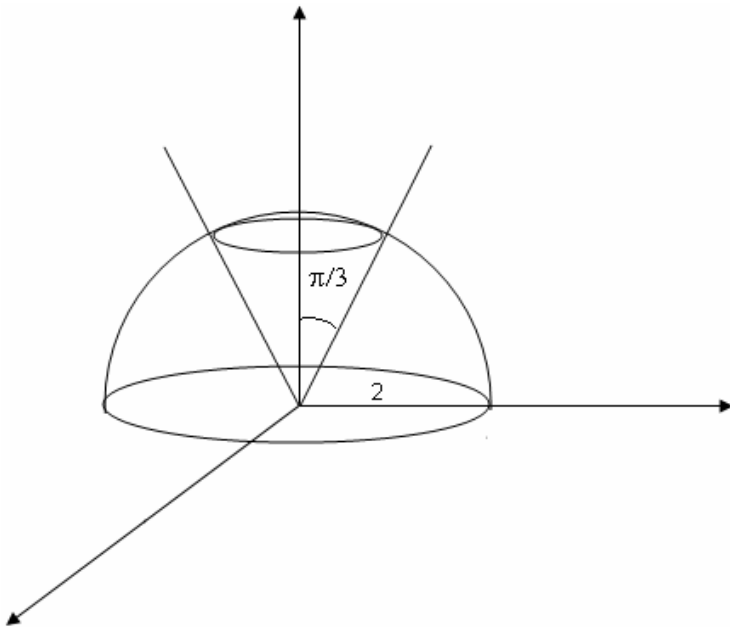
۱. $\tau = 1$, $\kappa = \frac{1}{3}$

۴. $\tau = 0$, $\kappa = \frac{\sqrt{3}}{3}$

۳. $\tau = 0$, $\kappa = \frac{1}{3}$

س ۷۷:

مساحت قسمتی از کره که در داخل مخروطی مطابق شکل قرار دارد برابر است با:



۱. 4π

۲. $4\pi\sqrt{3}$

۳. 4

۴. $\frac{\pi}{3}$

پ. معادلات دیفرانسیل (سوالات س ۷۸ تا س ۸۳):

س ۷۸:

جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر، کدامیک از گزینه‌های داده شده می‌باشد؟

$$y'' + y = 4x + 10\sin x$$

۱. $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x - 4x + 5x \sin x$

۲. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 4x - 5x \cos x$

۳. $y = c_1 \cos x - 4x + x^2$

۴. $y = c_2 \sin x + 4x - x^2$

س ۷۹:

تبدیل لاپلاس تابع $\left\{ \frac{1-e^t}{t} \right\}$ کدامیک از گزینه‌های داده شده زیر می‌باشد:

۱. $\ln \frac{s-1}{s^2}$

۲. $\ln \frac{s^2}{s-1}$

۳. $\ln \frac{s-1}{s}$

۴. $\ln \frac{s}{s-1}$

س ۸۰:

اگر y_1 و y_2 دو جواب مختلف معادله $x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - \alpha^2)y = 0$ باشند و داشته باشیم:

$$F(x) = e^{\int (y_1(x) dy_2(x) - y_2(x) dy_1(x))}$$

کدامیک از روابط زیر صحیح است؟

۱. $F(x) = k x^\alpha$

۲. $F(x) = k x^c$

۳. $F(x) = k x^\lambda$

۴. $F(x) = k e^{cx}$

س ۸۱:

منحنی جواب معادله دیفرانسیل $2(x+xy)dx + (x^2-1)dy = 0$ دارای چند مجانب است؟

۱. یک مجانب افقی و دو مجانب قائم

۲. یک مجانب قائم و یک مجانب افقی

۳. فقط یک مجانب افقی

۴. فقط یک مجانب قائم

س ۸۲:

جواب معادله انتگرالی زیر کدام است؟

$$y(x) = 2te^{-t} + \int_0^t (t-x)e^{(t-x)} y(x) dx$$

۱. $1 - e^{-2t}$

۲. $1 - e^{2t}$

۳. $e^t - 2$

۴. $2 + e^{-t}$

س ۸۳:

جواب عمومی معادله زیر در همسایگی $x = 0$ کدام است؟

$$x(1-x)y'' + 2y' + xy = 0$$

۱. $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1} + y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^{n-1}$

۲. $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-1/2}$

۳. $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + ky_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-1}$

۴. $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n+1/2}$

ت. ریاضیات مهندسی (سوالات س ۸۴ تا س ۸۷):

س ۸۴:

مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x)$$

$$u(0,t) = A(x)$$

$$u(l,t) = B(x)$$

برای آن که مسئله را به یک مسئله همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل نمود، کدام گزینه صحیح است؟

۱. همواره می‌توان مسئله را به یک مسئله همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل نمود.

۲. فقط کافی است که توابع A و B ثابت باشند.

۳. فقط کافی است که F مستقل از t باشد.

۴. کافی است توابع A و B ثابت باشند و علاوه بر آن، F مستقل از t باشد.

س ۸۵:

اگر $\phi(r, \theta)$ جواب معادله پتانسیل در داخل دیسک کامل به شعاع واحد با شرایط مرزی $\phi(1, \theta) = \sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta$ باشد، آنگاه ماکزیمم $\phi(r, \theta)$ در داخل و روی دیسک کدامیک از مقادیر زیر است؟

۲. $\phi_{\max} = 2$

۱. $\phi_{\max} = 1$

۴. $\phi_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

۳. $\phi_{\max} = \sqrt{3}$

س ۸۶:

اگر z یک متغیر مختلط باشد در اینصورت، حاصل $\oint_{|z|=7} \cot z$ برابر است با:

۲. $4\pi i$

۱. $2\pi i$

۴. $10\pi i$

۳. $6\pi i$

س ۸۷:

سری فوریه تابع $f(t) = |\sin t|$ و $0 < t < 2\pi$ برابر است با:

۲. $\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{1-n^2}$

۱. $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{1-4n^2}$

۴. $\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{1-n^2}$

۳. $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nt)}{1-4n^2}$

ث. محاسبات عددی (سوالات س ۸۸ تا س ۹۱):

س ۸۸:

برای حل دستگاه غیرخطی زیر به روش نیوتن-رافسون معادله تکرار چگونه می‌باشد؟

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ xy - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{1}{2x^2 - 2y^2} \begin{bmatrix} 1 & -2x \\ x & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ xy - 7 \end{bmatrix} \quad ۱.$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ xy - 7 \end{bmatrix} \quad ۲.$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{1}{2x^2 - 2y^2} \begin{bmatrix} x & -2y \\ -y & 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ xy - 7 \end{bmatrix} \quad ۳.$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{4 - y^2} \\ 7/x \end{bmatrix} \quad ۴.$$

س ۸۹:

با استفاده از جدول داده‌های زیر و با استفاده از روش اینترپولاسیون لاگرانژ دو، مقدار تقریبی تابع در $x = 2$ را بدست آورید:

x	$f(x)$
0	1
1	3
3	55

۱. 21

۲. 22

۳. 25

۴. 26

به نام خدا

آزمون پذیرش دانشجوی دوره دکترای سال تحصیلی ۸۸-۸۷

(درس ریاضی، خلاقیت مهندسی و هوش)



صفحه ۱۰ از ۱۴

س ۹۰:

معادله دیفرانسیل زیر را از روش اولر و با در نظر گرفتن اندازه گام $h = 0.2$ حل نموده و مقدار $u(0.4)$ را بدست آورید.

$$\frac{du}{dt} = -2tu^2, \quad u(0) = 1$$

۰.۹۲ .۲

۰.۹۰ .۱

۱.۰۰ .۴

۰.۹۶ .۳

س ۹۱:

فرم بسط داده شده از روش تفاضل محدود برای حل معادله زیر را تعیین کنید.

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} = k\theta$$

$$\theta_{i+1}(2i+1) + \theta_{i-1}(2i+1) + \theta_i(4i - 2ki\Delta x^2) = 0 \quad .۱$$

$$\theta_{i+1}(2i-1) - \theta_{i-1}(2i+1) + \theta_i(4i - 2ki\Delta x^2) = 0 \quad .۲$$

$$\theta_{i+1}(2i-1) + \theta_{i-1}(2i+1) - \theta_i(4i - 2ki\Delta x^2) = 0 \quad .۳$$

$$\theta_{i+1}(2i+1) + \theta_{i-1}(2i-1) - \theta_i(4i + 2ki\Delta x^2) = 0 \quad .۴$$

ج. آمار و احتمالات (سوالات س ۹۲ تا س ۹۵):

س ۹۲:

پروژه‌های پیشنهادی به مرکز تحقیقات سازه و زلزله دانشگاه صنعتی امیرکبیر پس از بررسی در کمیته تصمیم‌گیری ممکن است به نتایج زیر برسد:

D_1 : پیشنهاد قابل قبول است و حمایت مالی صورت خواهد گرفت.

D_2 : پیشنهاد باید پس از اصلاح، مجدداً به مرکز ارسال گردد.

D_3 : پیشنهاد رد می‌شود.

اطلاعات موجود ناشی از بررسی‌های قبلی مبین این است که احتمال هر کدام از موارد فوق $P(D_1)=0.45$ ، $P(D_2)=0.35$ و $P(D_3)=0.2$ می‌باشد. آقای دکتر X به علت عضویت چند ساله در این کمیته تجربه خوبی در پیش‌بینی نتیجه بررسی کمیته تصمیم‌گیری برخوردار است. احتمال شرطی نظر آقای دکتر X در مورد هر پیشنهاد $(P(l = D_j | D_i))$ ، در جدول زیر منعکس شده است. کدام گزینه مقادیر صحیح a ، b و c را جهت تکمیل جدول زیر نشان می‌دهد؟

نظر کمیته تصمیم‌گیری D_i	نظر دکتر X		
	$l = D_1$	$l = D_2$	$l = D_3$
D_1	0.76	0.1	a
D_2	Error! Objects cannot be created from editing field codes.	Error! Objects cannot be created from editing field codes.	Error! Objects cannot be created from editing field codes.
D_3	Error! Objects cannot be created from editing field codes.	0.1	0.8

۱. $a = 0.14$, $b = 0.80$, $c = 0.04$

۲. $a = 0.14$, $b = 0.74$, $c = 0.10$

۳. $a = 0.00$, $b = 0.80$, $c = 0.04$

۴. $a = 0.00$, $b = 0.74$, $c = 0.10$

س ۹۳:

اگر X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی تایی از جامعه‌ای با تابع احتمال زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

میانگین و واریانس متغیر تصادفی پاسخ، W ، که $W = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ می‌باشد، به ترتیب برابر است با:

۱. n و n

۲. 1 و n

۳. 1 و $\frac{1}{n}$

۴. 1 و $\frac{1}{n}$

س ۹۴:

متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر می‌باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & -3 < x < 3 \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$

تابع احتمال $Y = X^2$ کدام است؟

۲. $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y}}, & 0 < y < \frac{1}{4} \\ 0, & elsewhere \end{cases}$

۱. $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & 0 < y < 9 \\ 0, & elsewhere \end{cases}$

۴. $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{y}}, & 0 < y < 9 \\ 0, & elsewhere \end{cases}$

۳. $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ 0, & elsewhere \end{cases}$

س ۹۵:

از n ظرف کاملاً یکسان که در هر کدام a مهره سفید و b مهره سیاه وجود دارد، یک ظرف را به تصادف انتخاب و یک مهره از آن خارج می‌کنیم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد کدام است؟

۲. $\frac{na}{a+b}$

۱. $\frac{1}{n} \left(\frac{a}{a+b} \right)$

۴. $\frac{b}{a+b}$

۳. $\frac{a}{a+b}$

به نام خدا

آزمون پذیرش دانشجوی دوره دکترای سال تحصیلی ۸۸-۸۷

(درس ریاضی، خلاقیت مهندسی و هوش)



صفحه ۱۳ از ۱۴

ج. خلاقیت مهندسی و هوش (سوالات س ۹۶ تا س ۱۰۱):

س ۹۶:

در جدول زیر حرف جا افتاده کدام است؟

E	C	O
B	A	B
G	B	N
D	B	?

H .۲

M .۱

F .۴

T .۳

س ۹۷:

می‌خواهیم پنج شی با وزن‌های متفاوت را با یک ترازوی دو کفه‌ای، بدون استفاده از وزنه و با حداقل تعداد وزن کردن مرتب نماییم. برای این کار، حداکثر چند بار وزن کردن لازم است؟

۲. هفت بار

۱. هشت بار

۴. پنج بار

۳. شش بار

س ۹۸:

کدام یک از گزینه‌های داده شده می‌تواند از نظر منطقی در رشته اعداد زیر بجای علامت سؤال قرار گیرد؟

1-, -8, -27, ?

۲. -56

۱. -32

۴. -72

۳. -64

به نام خدا

آزمون پذیرش دانشجوی دوره دکترای سال تحصیلی ۸۸-۸۷

(درس ریاضی، خلاقیت مهندسی و هوش)



صفحه ۱۴ از ۱۴

س ۹۹:

به جای علامت سؤال چه عددی باید در جدول زیر قرار داده شود تا آن را کامل نماید؟

17	8	5	5
13	7	5	4
6	12	6	3
10	6	4	?

۲. 5

۱. 4

۴. 7

۳. 6

س ۱۰۰:

یک سفینه فضایی، سه پیام را به زبانی ناشناخته از یک سیاره دوردست دریافت می‌کند. در این سفینه، یک متخصص رمزگشایی نیز وجود دارد. پس از مطالعه پیام‌های رسیده، این نتایج بدست آمد:

الروس آلداریون الندیل یعنی خطر راکت انفجار.

ادین مناتورالروس یعنی خطر سفینه آتش.

آلداریون گیمیلزور گاندور یعنی بد گاز انفجار.

بدین ترتیب معنای الندیل در این زبان ناشناخته کدامیک از گزینه‌های داده شده می‌باشد؟

۲. راکت

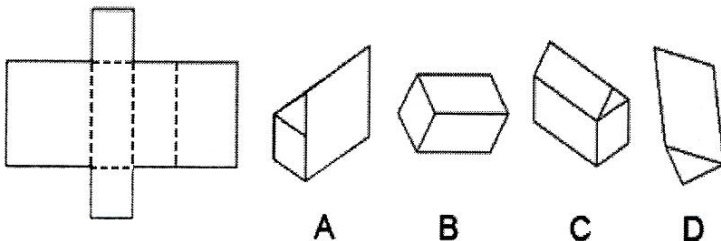
۱. انفجار

۴. خطر

۳. گاز

س ۱۰۱:

اگر جسم باز شده در انتها الیه سمت چپ را تا بزنیم، کدامیک از گزینه‌های داده شده بدست می‌آید؟



۲. B

۱. A

۴. D

۳. C